



- 10) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 69. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 69 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 6 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 62$ .

Вопросы 19-21 к задаче 11 и следующим задачам следующие:

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

**Задание 20.**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Задание 21**

Найдите два значения  $S$ , при которых одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

- 11) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 62. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 62 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 54$ .
- 12) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 66. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 66 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 58$ .
- 13) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 68 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 60$ .
- 14) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 74. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 74 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 66$ .
- 15) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 59. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 59 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 5 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 53$ .
- 16) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество



- 26) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 79. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 79 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 69$ .
- 27) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 75. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 75 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 65$ .
- 28) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 78. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 78 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 70$ .
- 29) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 72. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 72 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 64$ .
- 30) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 62. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 62 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 54$ .
- 31) (А. Носкин) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 41. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 41 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 31$ .

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

**Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

*Вопросы 19-21 к задаче 32 и следующим задачам следующие:*

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

**Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Сколько существует значений  $S$ , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 32) (А. Носкин) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 40. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 40 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 30$ .
- 33) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 53. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 53 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 43$ .
- 34) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 49. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 49 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 41$ .
- 35) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 61. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 61 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 53$ .
- 36) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 48. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 48 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 8 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 39$ .
- 37) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 61. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 61 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 10 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 50$ .
- 38) (С.А. Скопинцева) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может увеличить количество камней в куче в три раза, добавить в кучу один камень, или 3 камня, при этом после каждого хода в куче должно быть нечетное количество камней. Например, пусть в куче было 8 камней. Тогда за один ход можно получить кучу из 9 камней или из 11 камней (увеличить количество камней в три раза нельзя, т.к. после этого хода получится четное количество камней – 24). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 51.

В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 50$ .

- 19.** Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.
- 20.** Найдите два наибольших значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:
- Петя не может выиграть за один ход;
  - Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.
- Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.
- 21.** Определите, сколько существует значений  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим вторым ходом независимо от ходов Пети.

Вопросы 19–21 к следующим задачам:

**Задание 19.**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.**

Сколько существует значений  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Задание 21**

Найдите два наибольших значения  $S$ , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**39) (А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 17 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 25. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 25 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 24$ .

**40) (А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 33 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 32$ .

**41) (А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в

куче становится не менее 50. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 50 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 49$ .

- 42) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня, добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 17, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 30. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 30 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 29$ .

Вопросы 19–21 к следующим задачам:

#### Задание 19.

Найдите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?

#### Задание 20.

Найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### Задание 21

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 43) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) добавить в кучу один камень;
  - б) добавить в кучу два камня;
  - в) добавить в кучу три камня;
  - г) увеличить количество камней в куче в два раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 34 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 33$ .

- 44) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) добавить в кучу один камень;
  - б) добавить в кучу два камня;
  - в) добавить в кучу три камня;
  - г) увеличить количество камней в куче в два раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 37. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 38 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 37$ .

- 45) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) добавить в кучу один камень;
  - б) добавить в кучу два камня;

г) **увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 64. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 65 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 64$ .

Вопросы 19-21 к следующим задачам:

**Задание 19.**

Найдите **минимальное значение  $S$** , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.**

Сколько существует значений  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Задание 21**

Найдите **минимальное и максимальное значение  $S$** , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

46) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в кучу два камня;**
- б) **увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 45. Если при этом в куче оказалось не более 112 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 44$ .

47) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в кучу один камень;**
- б) **увеличить количество камней в куче в два раза;**
- в) **увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 36. Если при этом в куче оказалось не более 60 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 35$ .

48) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в кучу один камень;**
- б) **увеличить количество камней в куче в два раза;**
- в) **увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 43. Если при этом в куче оказалось не более 72 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 42$ .

Вопросы 19-21 к следующим задачам:

**Задание 19.**

Найдите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.**

Найдите **минимальное и максимальное значение  $S$** , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 49) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из одной из куч один камень или уменьшить количество камней в куче в два раза (если количество камней в куче нечётно, остаётся на 1 камень **больше**, чем убирается). Например, пусть в одной куче 6, а в другой 9 камней; такую позицию мы будем обозначать (6, 9). За один ход из позиции (6, 9) можно получить любую из четырёх позиций: (5, 9), (3, 9), (6, 8), (6, 5). Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не более 20. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 20 или меньше камней. В начальный момент в первой куче было 10 камней, во второй куче –  $S$  камней,  $S > 10$ .
- 50) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из одной из куч один камень или уменьшить количество камней в куче в два раза (если количество камней в куче нечётно, остаётся на 1 камень **больше**, чем убирается). Например, пусть в одной куче 6, а в другой 9 камней; такую позицию мы будем обозначать (6, 9). За один ход из позиции (6, 9) можно получить любую из четырёх позиций: (5, 9), (3, 9), (6, 8), (6, 5). Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не более 30. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 30 или меньше камней. В начальный момент в первой куче было 18 камней, во второй куче –  $S$  камней,  $S > 12$ .
- 51) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из одной из куч один камень или уменьшить количество камней в куче в два раза (если количество камней в куче нечётно, остаётся на 1 камень **больше**, чем убирается). Например, пусть в одной куче 6, а в другой 9 камней; такую позицию мы будем обозначать (6, 9). За один ход из позиции (6, 9) можно получить любую из четырёх позиций: (5, 9), (3, 9), (6, 8), (6, 5). Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не более 32. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 32 или меньше камней. В начальный момент в первой куче было 10 камней, во второй куче –  $S$  камней,  $S > 22$ .
- 52) **(Е. Джобс)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) добавить в кучу **сто** камней или
  - б) увеличить количество камней в куче в **два** раза.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 110 или 20 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 1000. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 1000 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 999$ .

**Задание 19.** Сколько существует значений  $S$ , при которых Ваня выигрывает первым ходом?

**Задание 20.** Сколько существует значений  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

**Задание 21.** Назовите минимальное и максимальное значение  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом, при этом для любого значения  $u$  Вани есть возможность выиграть своим первым ходом (в случае ошибки Пети).

53) (Д. Ф. Муфаззалов, г. Уфа) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча, состоящая из  $S$  конфет. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может съесть не более пяти, но не менее одной конфеты или съесть половину конфет, если число конфет четное. Съесть можно только целое количество конфет.

Игра завершается в тот момент, когда в куче останется **менее десяти конфет**. Победителем считается игрок, который сделал последний ход.

**Задание 19.** Укажите значение  $S$ , при которых Ваня выигрывает первым ходом.

**Задание 20.** Укажите минимальное и максимальное  $S$ , при которых Петя не может выиграть первым ходом, но может выиграть вторым ходом при любом ходе Вани.

**Задание 21.** Укажите такое значение  $S$ , при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

*Вопросы 19-21 к следующим задачам:*

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

**Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

54) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 83. В начальный момент в первой куче было 5 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 77$ .

55) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;  
 б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 95. В начальный момент в первой куче было 5 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 89$ .

56) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;  
 б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 105. В начальный момент в первой куче было 4 камня, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 100$ .

57) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;  
 б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 129. В начальный момент в первой куче было 4 камня, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 124$ .

58) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;  
 б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 100. В начальный момент в первой куче было 6 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 93$ .

59) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;  
 б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 108. В начальный момент в первой куче было 6 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 101$ .

60) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;  
 б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 125. В начальный момент в первой куче было 7 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 117$ .

61) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;  
 б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 133. В начальный момент в первой куче было 7 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 125$ .

62) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в любую кучу один камень или увеличить количество камней в любой куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 30. В начальный момент в первой куче было  $K$  камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq K \leq 29$ ,  $1 \leq S \leq 29$ .

Ответьте на следующие вопросы:

**Задание 19.** Сколько существует пар  $(K; S)$ , таких что Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.** При  $K=6$ , найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21.** Сколько существует пар  $(K; S)$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 63) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в любую кучу один камень** или **увеличить количество камней в первой куче в два раза** или **увеличить количество камней во второй куче в три раза**. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 30. В начальный момент в первой куче было  $K \geq 1$  камней, а во второй –  $S \geq 1$  камней,  $K+S \leq 29$ .

Ответьте на следующие вопросы:

**Задание 19.** Сколько существует пар  $(K; S)$ , таких что Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.** При  $S=7$ , найдите минимальное и максимальное значение  $K$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21.** При  $K=1$  найдите такое значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 64) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в любую кучу два камня** или **увеличить количество камней в любой куче в три раза**. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 45. В начальный момент в первой куче было  $K \geq 1$  камней, а во второй –  $S \geq 1$  камней,  $K+S \leq 43$ .

Ответьте на следующие вопросы:

**Задание 19.** Сколько существует пар  $(K; S)$ , таких что Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.** При  $K=4$ , найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21.** При  $K=13$  найдите такое значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 65) **(А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **убрать из ку-**

**чи один камень или уменьшить количество камней в любой куче в два раза (если количество камней нечётно, то остаётся на один камень меньше, чем убирается).** Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не более 18, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было  $K \geq 1$  камней, а во второй –  $S \geq 1$  камней,  $S+K \geq 19$ .

Ответьте на следующие вопросы:

**Задание 19.** Известно, что из начальной позиции  $(M; M)$  Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети. При каком значении  $M$  это возможно?

**Задание 20.** При  $K=13$ , найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21.** При каком минимальном значении  $N$  для начальной пары  $(N; N)$  одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Вопросы 19-21 к следующим задачам:**

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

**Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

66) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **добавить** в любую кучу **столько камней, сколько их в данный момент в другой куче**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 81. В начальный момент в первой куче было 7 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 73$ .

67) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **добавить** в любую кучу **столько камней, сколько их в данный момент в другой куче**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 69. В начальный момент в первой куче было 7 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 61$ .

68) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) **добавить** в любую кучу **столько камней, сколько их в данный момент в другой куче**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 58. В начальный момент в первой куче было 6 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 51$ .

69) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) **добавить** в любую кучу **столько камней, сколько их в данный момент в другой куче**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 64. В начальный момент в первой куче было 6 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 57$ .

70) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) **добавить** в любую кучу **столько камней, сколько их в данный момент в другой куче**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 62. В начальный момент в первой куче было 8 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 53$ .

71) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) **добавить** в любую кучу **столько камней, сколько их в данный момент в другой куче**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 68. В начальный момент в первой куче было 8 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 59$ .

72) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) **добавить** в любую кучу **столько камней, сколько их в данный момент в другой куче**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 80. В начальный момент в первой куче было 8 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 71$ .

73) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) **добавить** в любую кучу **столько камней, сколько их в данный момент в другой куче**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 73. В начальный момент в первой куче было 9 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 63$ .

74) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) **добавить** в любую кучу **столько камней, сколько их в данный момент в другой куче**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 79. В начальный момент в первой куче было 9 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 69$ .

**Вопросы 19-21 к следующим задачам:**

#### **Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

#### **Задание 20.**

Определите, **сколько существует** таких значений  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

– Петя не может выиграть за один ход;

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

### Задание 21

Укажите максимальное значение  $S$ , при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть при любой игре Пети.

75) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 70. В начальный момент в первой куче было 6 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 63$ .

76) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 81. В начальный момент в первой куче было 7 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 73$ .

77) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 90. В начальный момент в первой куче было 9 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 80$ .

78) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 99. В начальный момент в первой куче было 8 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 90$ .

### Вопросы 19-21 к следующим задачам:

#### Задание 19.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

#### Задание 20.

Определите, два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

#### Задание 21

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

79) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 20. Если при этом в куче оказалось не более 30 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 17 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 19$ .

80) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 25. Если при этом в куче оказалось не более 45 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 23 камня и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 24$ .

81) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 30. Если при этом в куче оказалось не более 45 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 27 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 29$ .

82) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 50. Если при этом в куче оказалось не более 70 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 40 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 49$ .

83) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 56. Если при этом в куче оказалось не более 80 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 45 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 55$ .

84) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 65. Если при этом в куче оказалось не более 100 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было

55 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 64$ .

85) (А. Богданов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит одна куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **убрать** из кучи **половину камней**, если количество камней в куче делится на 2; иначе убрать из кучи **два камня**;

б) **убрать** из кучи **две трети камней**, если количество камней в куче делится на 3; иначе убрать из кучи **три камня**.

Например, пусть в куче 10 камней, тогда можно убрать половину или только три камня. А если в куче 12 камней, то можно убрать половину или две трети камней. Игра завершается в тот момент, когда в куче останется ровно 1 камень. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет ровно 1 камень. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $2 \leq S \leq 37$ .

#### Задание 19.

Найдите максимальное значение  $S$ , когда Петя мог выиграть первым ходом, но ошибся, и Ваня выиграл.

#### Задание 20.

Найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором Петя выигрывает вторым ходом при любом ходе Вани.

#### Задание 21

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором Петя может выбрать, каким ходом выигрывает Ваня.

86) (Е. Джобс) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. У игроков есть табличка, на которой записана пара неотрицательных целых чисел. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может заменить любое число на сумму обоих чисел. Так, например, если перед ходом игрока была позиция (3, 5), то после его хода будет позиция (8, 5) или (3, 8). Игра завершается в тот момент, когда сумма чисел пары становится не менее 45.

#### Задание 19.

Известно, что игра началась в позиции (7,  $S$ ), при этом Ваня одержал победу после неудачного хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

#### Задание 20.

Найдите значения  $S$ , при которых Петя при правильной игре гарантированно выигрывает своим вторым ходом из позиции (6,  $S$ ). В качестве ответа укажите сначала минимальное, затем максимальное значение.

#### Задание 21

Известно, что при игре из позиции ( $S$ ,  $S$ ) Ваня гарантированно выигрывает своим вторым ходом при любой игре Пети. Найдите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

87) (А. Богданов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит три кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч 3, 13 или 23 камня. Игра завершается в тот момент, когда в сумме в кучах будет не менее 73 камней. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в кучах было (2,  $S$ ,  $2S$ ) камней,  $1 \leq S \leq 23$ .

#### Задание 19.

При некотором значении  $S$  Ваня одержал победу своим первым ходом после неудачного хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

#### Задание 20.

Найдите минимальное и максимальное значения  $S$ , при которых Петя выигрывает вторым ходом при любом ходе Вани.

**Задание 21**

Найдите два значения  $S$ , при которых выигрышная стратегия есть у Вани, но Петя может выбрать, каким ходом выиграет Ваня – первым или вторым.