

Динамика робототехнических систем:

1. Метод Ньютона-(Эйлера)
2. Дополнительные разделы

Преподаватель: к.т.н., Колюбин С.А.

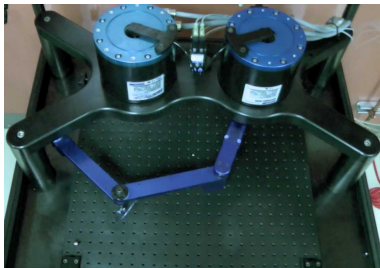


УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Содержание лекции

- моделирование замкнутых кинематических цепей
- модели роботов с гибкими сочленениями
- метод Ньютона(-Эйлера)
- модели в операционном пространстве

Примеры манипуляторов с замкнутой кинематикой



Конструкция пятирычажного механизма

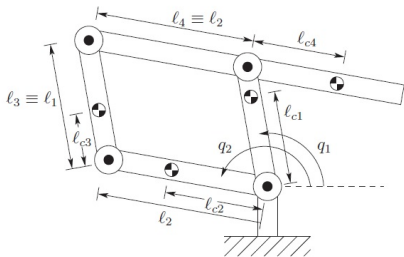


Рис.: Пятирычажный механизм (©Spong).

Последовательность вывода ур-ий движения

- Вычисление кинетической энергии $\mathcal{K}(q_1, q_2, q_3, q_4)$
- Вычисление потенциальной энергии $\mathcal{P}(q_1, q_2, q_3, q_4)$
- Составление ур-ия Эйлера-Лагранжа $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}$.

Общий случай

- не параллелограмм
 $l_1 \neq l_3, l_2 \neq l_4$
- голономные связи $N_c(q)$ в замкнутой кинематической цепи вызывают силы связей F_c .

Кинетическая и потенциальная энергия

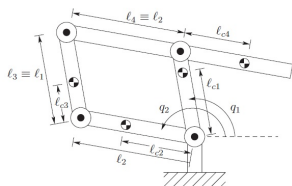


Рис.: Пятирычажный механизм (©Spong).

Координаты центров масс

$$\begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos q_1 \\ l_{c1} \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c2} \cos q_2 \\ l_{c2} \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos q_2 + l_{c3} \cos q_3 \\ l_2 \sin q_2 + l_{c3} \sin q_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c4} \\ y_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 - l_{c4} \cos q_4 \\ l_1 \sin q_1 - l_{c4} \sin q_4 \end{bmatrix}$$

Кинетическая и потенциальная энергия

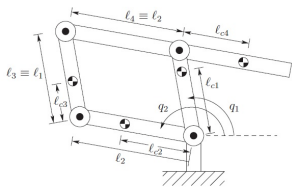


Рис.: Пятирычажный механизм (©Spong).

Линейные/угловые скорости

$$v_{c1} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin q_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{c1} \cos q_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$v_{c2} = \dots, \quad v_{c3} = \dots, \quad v_{c4} = \dots$$

Координаты центров масс

$$\begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos q_1 \\ l_{c1} \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c2} \cos q_2 \\ l_{c2} \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos q_2 + l_{c3} \cos q_3 \\ l_2 \sin q_2 + l_{c3} \sin q_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c4} \\ y_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 - l_{c4} \cos q_4 \\ l_1 \sin q_1 - l_{c4} \sin q_4 \end{bmatrix}$$

Кинетическая и потенциальная энергия

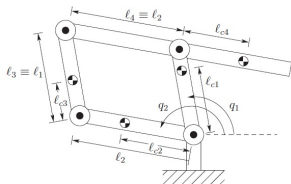


Рис.: Пятирычажный механизм (©Spong).

Энергия

Координаты центров масс

$$\begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos q_1 \\ l_{c1} \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c2} \cos q_2 \\ l_{c2} \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos q_2 + l_{c3} \cos q_3 \\ l_2 \sin q_2 + l_{c3} \sin q_3 \end{bmatrix}$$

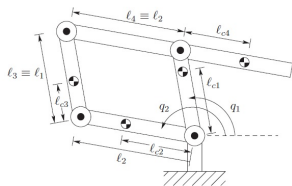
$$\begin{bmatrix} x_{c4} \\ y_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 - l_{c4} \cos q_4 \\ l_1 \sin q_1 - l_{c4} \sin q_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{1}{2} \left[m_1 |v_{c1}|^2 + \omega_1^T \mathcal{I}_1 \omega_1 \right] + \frac{1}{2} \left[m_2 |v_{c2}|^2 + \omega_2^T \mathcal{I}_2 \omega_2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[m_3 |v_{c3}|^2 + \omega_3^T \mathcal{I}_3 \omega_3 \right] + \frac{1}{2} \left[m_4 |v_{c4}|^2 + \omega_4^T \mathcal{I}_4 \omega_4 \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{P} = m_1 g y_{c1} + m_2 g y_{c2} + m_3 g y_{c3} + m_4 g y_{c4}$$

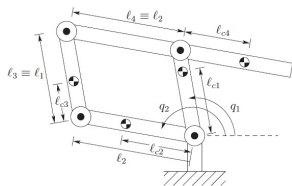
Голономные связи

Голономные связи в механизме



Голономные связи

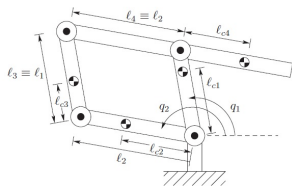
Голономные связи в механизме



$$N_c(q) = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 + l_4 \cos q_4 - l_2 \cos q_2 - l_3 \cos q_3 \\ l_1 \sin q_1 + l_4 \sin q_4 - l_2 \sin q_2 - l_3 \sin q_3 \end{bmatrix} = 0$$

Голономные связи

Голономные связи в механизме



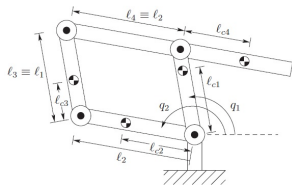
$$N_c(q) = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 + l_4 \cos q_4 - l_2 \cos q_2 - l_3 \cos q_3 \\ l_1 \sin q_1 + l_4 \sin q_4 - l_2 \sin q_2 - l_3 \sin q_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{d}{dt} N_c(q) = J_c(q) \dot{q} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 & l_2 \sin q_2 & l_3 \sin q_3 & -l_4 \sin q_4 \\ l_1 \cos q_1 & -l_2 \cos q_2 & -l_3 \cos q_3 & l_4 \cos q_4 \end{bmatrix} \dot{q} = 0$$

Голономные связи

Голономные связи в механизме



$$N_c(q) = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 + l_4 \cos q_4 - l_2 \cos q_2 - l_3 \cos q_3 \\ l_1 \sin q_1 + l_4 \sin q_4 - l_2 \sin q_2 - l_3 \sin q_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{d}{dt} N_c(q) = J_{c,1}(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + J_{c,2}(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} N_c(q) = [J_{c,1}(q, \dot{q}) \quad J_{c,2}(q, \dot{q})] \dot{q} + [J_{c,1}(q) \quad J_{c,2}(q)] \ddot{q} = 0$$

Редуцированная динамика

- Система описана в избыточных координатах $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} \in \mathbb{R}^4$.
- Две независимые голономные связи $N_c(q) \in \mathbb{R}^2$ вызывают силы $F_c \in \mathbb{R}^2$.

Редуцированная динамика

- Система описана в избыточных координатах $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} \in \mathbb{R}^4$.
- Две независимые голономные связи $N_c(q) \in \mathbb{R}^2$ вызывают силы $F_c \in \mathbb{R}^2$.
- Правая часть ур-ия Э-Л содержит силы связи

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(\mathcal{K} - \mathcal{P})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial(\mathcal{K} - \mathcal{P})}{\partial q} = \tau + J_c^T F_c$$

- Нужно вычислить силы связи и редуцировать динамику до $4 - 2 = 2$ обобщенных координат, т.е. $\{q_1, q_2\} \in \mathbb{R}^2$.

Редуцированная динамика

Выбираем $q_r = [q_1, q_2]^T$ и $q_c = [q_3, q_4]^T$

$$\begin{bmatrix} D_1(q) \\ D_2(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(q, \dot{q}) \\ C_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{c,1}^T F_c \\ J_{c,2}^T F_c \end{bmatrix}$$

Редуцированная динамика

Выбираем $q_r = [q_1, q_2]^T$ и $q_c = [q_3, q_4]^T$

$$\begin{bmatrix} D_1(q) \\ D_2(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(q, \dot{q}) \\ C_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{c,1}^T F_c \\ J_{c,2}^T F_c \end{bmatrix}$$

Подставляем из выраж-ий для обобщенных координат

$$q_c = f(q_r), f: N(q_r) \rightarrow q_c$$

$$\dot{q}_c = -J_{c,2}^{-1}(q) J_{c,1}(q) \dot{q}_r$$

$$\ddot{q}_c = -\dot{J}_{c,1}(q, \dot{q}_r) \dot{q}_r + J_{c,1}(q) \ddot{q}_r + \dot{J}_{c,2}(q, \dot{q}_r) \dot{q}_c$$

Редуцированная динамика

Выбираем $q_r = [q_1, q_2]^T$ и $q_c = [q_3, q_4]^T$

$$\begin{bmatrix} D_1(q) \\ D_2(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(q, \dot{q}) \\ C_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{c,1}^T F_c \\ J_{c,2}^T F_c \end{bmatrix}$$

Подставляем из выраж-ий для обобщенных координат

$$q_c = f(q_r), f: N(q_r) \rightarrow q_c$$

$$\dot{q}_c = -J_{c,2}^{-1}(q) J_{c,1}(q) \dot{q}_r$$

$$\ddot{q}_c = -J_{c,2}^{-1}(q) [\dot{J}_{c,1}(q, \dot{q}_r) \dot{q}_r + J_{c,1}(q) \ddot{q}_r + \dot{J}_{c,2}(q, \dot{q}_r) \dot{q}_c]$$

Силы связей вычисляются как

$$F_c = \begin{bmatrix} F_{c,x} \\ F_{c,y} \end{bmatrix} = [J_{c,2}^T]^{-1} \left[D_2(q) \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} + C_2(q, \dot{q}_r) \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + G_2 \right]$$

Редуцированная динамика

Выбираем $q_r = [q_1, q_2]^T$ и $q_c = [q_3, q_4]^T$

$$\begin{bmatrix} D_1(q) \\ D_2(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(q, \dot{q}) \\ C_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{c,1}^T F_c \\ J_{c,2}^T F_c \end{bmatrix}$$

Подставляем из выраж-ий для обобщенных координат

$$q_c = f(q_r), f: N(q_r) \rightarrow q_c$$

$$\dot{q}_c = -J_{c,2}^{-1}(q) J_{c,1}(q) \dot{q}_r$$

$$\ddot{q}_c = -J_{c,2}^{-1}(q) [\dot{J}_{c,1}(q, \dot{q}_r) \dot{q}_r + J_{c,1}(q) \ddot{q}_r + \dot{J}_{c,2}(q, \dot{q}_r) \dot{q}_c]$$

Редуцированная динамика после группировки слагаемых

$$D_r(q) \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + C_r(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + G_r = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Пятирычажный механизм (упрощение)

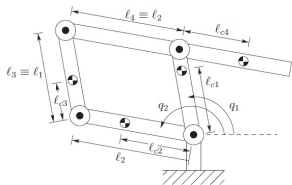


Рис.: Пятирычажный механизм (©Spong).

Упрощенный случай

- параллелограмм

$$l_1 = l_3, l_2 = l_4$$

$$q_3 = q_1, q_4 = q_2$$

- сразу используем обобщенные координаты $\{q_1, q_2\}$ и не рассматриваем силы связей

Последовательность вывода ур-ий движения

- Вычисляем кинетическую энергию $\mathcal{K}(q_1, q_2)$
- Вычисляем потенциальную энергию $\mathcal{P}(q_1, q_2)$
- Выводим ур-ие Эйлера-Лагранжа $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}$.

Кинетическая и потенциальная энергия

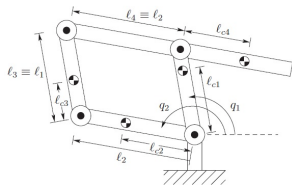


Рис.: Пятирычажный механизм
 (©Spong).

$$\begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos q_1 \\ l_{c1} \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c2} \cos q_2 \\ l_{c2} \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos q_2 + l_{c3} \cos q_1 \\ l_2 \sin q_2 + l_{c3} \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c4} \\ y_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 - l_{c4} \cos q_2 \\ l_1 \sin q_1 - l_{c4} \sin q_2 \end{bmatrix}$$

Кинетическая и потенциальная энергия

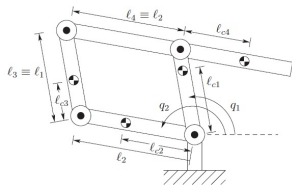


Рис.: Пятирычажный механизм
(©Spong).

$$\begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos q_1 \\ l_{c1} \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c2} \cos q_2 \\ l_{c2} \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos q_2 + l_{c3} \cos q_1 \\ l_2 \sin q_2 + l_{c3} \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c4} \\ y_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 - l_{c4} \cos q_2 \\ l_1 \sin q_1 - l_{c4} \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$v_{c1} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin q_1 & 0 \\ l_{c1} \cos q_1 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1, \quad v_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & -l_{c2} \sin q_2 \\ 0 & l_{c2} \cos q_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2$$

$$v_{c3} = \begin{bmatrix} -l_{c3} \sin q_1 & -l_2 \sin q_2 \\ l_{c3} \cos q_1 & l_2 \cos q_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1, \quad v_{c4} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 & l_{c4} \sin q_2 \\ l_1 \cos q_1 & -l_{c4} \cos q_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1$$

$$\omega_1 = \omega_3 = \dot{q}_1 \vec{k}, \quad \omega_2 = \omega_4 = \dot{q}_2 \vec{k}$$

Кинетическая и потенциальная энергия

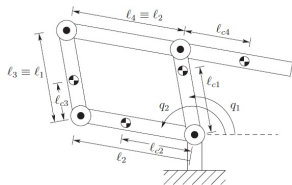


Рис.: Пятирычажный механизм
(©Spong).

$$\begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos q_1 \\ l_{c1} \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c2} \cos q_2 \\ l_{c2} \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos q_2 + l_{c3} \cos q_1 \\ l_2 \sin q_2 + l_{c3} \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c4} \\ y_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 - l_{c4} \cos q_2 \\ l_1 \sin q_1 - l_{c4} \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} \left[m_1 |v_{c1}|^2 + \omega_1^T \mathcal{I}_1 \omega_1 \right] + \frac{1}{2} \left[m_2 |v_{c2}|^2 + \omega_2^T \mathcal{I}_2 \omega_2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[m_3 |v_{c3}|^2 + \omega_3^T \mathcal{I}_3 \omega_3 \right] + \frac{1}{2} \left[m_4 |v_{c4}|^2 + \omega_4^T \mathcal{I}_4 \omega_4 \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{P} = m_1 g y_{c1} + m_2 g y_{c2} + m_3 g y_{c3} + m_4 g y_{c4}$$

Уравнение движения

Вычисление кинетической энергии

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \dot{q}$$

при

$$d_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_1^2 + I_1 + I_3$$

$$d_{12} = [m_3 l_2 l_{c3} - m_4 l_1 l_{c4}] \cdot \cos(q_2 - q_1)$$

$$d_{22} = m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_{c4}^2 + I_2 + I_4$$

Уравнение движения

Вычисление кинетической энергии

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \dot{q}$$

при

$$d_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_1^2 + I_1 + I_3$$

$$d_{12} = [m_3 l_2 l_{c3} - m_4 l_1 l_{c4}] \cdot \cos(q_2 - q_1)$$

$$d_{22} = m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_{c4}^2 + I_2 + I_4$$

Если механизм сконструирован так что $[m_3 l_2 l_{c3} - m_4 l_1 l_{c4}] = 0$,
 тогда матрица инерции диагональная и постоянная.

⇒ Динамика не содержит Кориолисовых и центробежных сил!

Уравнение движения

Вычисление кинетической энергии

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \dot{q}$$

при

$$d_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_1^2 + I_1 + I_3$$

$$d_{12} = [m_3 l_2 l_{c3} - m_4 l_1 l_{c4}] \cdot \cos(q_2 - q_1)$$

$$d_{22} = m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_{c4}^2 + I_2 + I_4$$

Если механизм сконструирован так что $[m_3 l_2 l_{c3} - m_4 l_1 l_{c4}] = 0$,
 тогда матрица инерции диагональная и постоянная.

⇒ Динамика не содержит Кориолисовых и центробежных сил!

Уравнения движения не имеют перекрестных связей

$$d_{11} \dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{P} = \tau_1, \quad d_{22} \dot{q}_2 + \frac{\partial}{\partial q_2} \mathcal{P} = \tau_2$$

Роботы с гибкими сочленениями

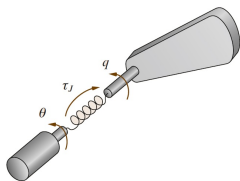


Рис.: Схема гибкого сочленения

Гибкие сочленения

Актюатор (вход) и звено (выход) связаны через гибкий (деформируемый) элемент

- длинный вал
- гармонический редуктор
- ремни/тросы

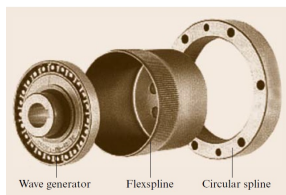


Рис.: Гармонический редуктор

Гибкость может специально вноситься

- 1 конструктивно/физически (VSA, SEA)
- 2 программно

для

- безопасного рНRI
- генерирования "взрывных" движений

Роботы с гибкими сочленениями

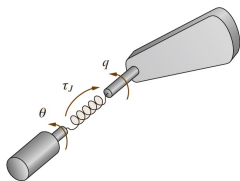


Рис.: Схема гибкого сочленения

Гибкие сочленения

Актюатор (вход) и звено (выход) связаны через гибкий (деформируемый) элемент

- длинный вал
- гармонический редуктор
- ремни/тросы

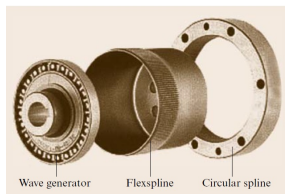


Рис.: Гармонический редуктор

Гибкость может специально вноситься

- 1 конструктивно/физически (VSA, SEA)
- 2 программно

для

- безопасного рНRI
- генерирования "взрывных" движений

Моделирование гибких сочленений

Модельные допущения

- 1 деформация сосредоточена в сочленении
- 2 гибкость вызывает небольшие смещения (описываются моделью линейной пружины)
- 3 роторы приводов имеют равномерное распределение массы с центром масс на оси вращения
- 4 привод располагается до приводимого им в движение звена

Моделирование гибких сочленений

- вводится $2n$ обобщенных координат: $q \in R^n$ - координаты звеньев, $\theta \in R^n$ - координаты приводов ($\theta_i = \theta_{mi}/r_i$, r_i - передаточное число)
- добавляем кинетическую энергию привода

$$\mathcal{K}_{mi} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_m \dot{\theta}_{mi}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{I}_m r_i^2 \dot{\theta}_i^2$$

$$\mathcal{K}_m = \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_{mi} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M_m \dot{\theta}$$

M_m - диагональная матрица инерции приводов

- добавляем потенциальную энергии деформированной пружины

$$\mathcal{P}_{ei} = \frac{1}{2} K_i (q_i - \theta_i)^2$$

$$\mathcal{P}_e = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{ei} = \frac{1}{2} (q - \theta)^T K (q - \theta)$$

K - диагональная матрица коэффициентов жесткости сочленений

- составляем ур-ие движения

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + G(q) + K(q - \theta) = 0,$$

$$M_m \ddot{\theta} + K(\theta - q) = \tau$$

Моделирование гибких сочленений

- вводится $2n$ обобщенных координат: $q \in R^n$ - координаты звеньев, $\theta \in R^n$ - координаты приводов ($\theta_i = \theta_{mi}/r_i$, r_i - передаточное число)
- добавляем кинетическую энергию привода

$$\mathcal{K}_{mi} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_m \dot{\theta}_{mi}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{I}_m r_i^2 \dot{\theta}_i^2$$

$$\mathcal{K}_m = \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_{mi} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M_m \dot{\theta}$$

M_m - диагональная матрица инерции приводов

- добавляем потенциальную энергию деформированной пружины

$$\mathcal{P}_{ei} = \frac{1}{2} K_i (q_i - \theta_i)^2$$

$$\mathcal{P}_e = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{ei} = \frac{1}{2} (q - \theta)^T K (q - \theta)$$

K - диагональная матрица коэффициентов жесткости сочленений

- составляем ур-ие движения

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + G(q) + K(q - \theta) = 0,$$

$$M_m \ddot{\theta} + K(\theta - q) = \tau$$

Моделирование гибких сочленений

- вводится $2n$ обобщенных координат: $q \in R^n$ - координаты звеньев, $\theta \in R^n$ - координаты приводов ($\theta_i = \theta_{mi}/r_i$, r_i - передаточное число)
- добавляем кинетическую энергию привода

$$\mathcal{K}_{mi} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_m \dot{\theta}_{mi}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{I}_m r_i^2 \dot{\theta}_i^2$$

$$\mathcal{K}_m = \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_{mi} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M_m \dot{\theta}$$

M_m - диагональная матрица инерции приводов

- добавляем потенциальную энергии деформированной пружины

$$\mathcal{P}_{ei} = \frac{1}{2} K_i (q_i - \theta_i)^2$$

$$\mathcal{P}_e = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{ei} = \frac{1}{2} (q - \theta)^T K (q - \theta)$$

K - диагональная матрица коэффициентов жесткости сочленений

- составляем ур-ие движения

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + G(q) + K(q - \theta) = 0,$$

$$M_m \ddot{\theta} + K(\theta - q) = \tau$$

Моделирование гибких сочленений

- вводится $2n$ обобщенных координат: $q \in R^n$ - координаты звеньев, $\theta \in R^n$ - координаты приводов ($\theta_i = \theta_{mi}/r_i$, r_i - передаточное число)
- добавляем кинетическую энергию привода

$$\mathcal{K}_{mi} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_m \dot{\theta}_{mi}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{I}_m r_i^2 \dot{\theta}_i^2$$

$$\mathcal{K}_m = \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_{mi} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M_m \dot{\theta}$$

M_m - диагональная матрица инерции приводов

- добавляем потенциальную энергии деформированной пружины

$$\mathcal{P}_{ei} = \frac{1}{2} K_i (q_i - \theta_i)^2$$

$$\mathcal{P}_e = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{ei} = \frac{1}{2} (q - \theta)^T K (q - \theta)$$

K - диагональная матрица коэффициентов жесткости сочленений

- составляем ур-ие движения

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + G(q) + K(q - \theta) = 0,$$

$$M_m \ddot{\theta} + K(\theta - q) = \tau$$

Сравнение методов

Методы

- (Эйлера-)Лагранжа - кинетическая и потенциальная энергия
 - динамика многозвенного робота рассматривается в целом
 - внутренние силы реакции связей исключаются из уравнений
 - уравнения в символьной форме
 - лучше для анализа
- Ньютона(-Эйлера) - баланс сил и моментов
 - уравнения записаны отдельно для каждого тела/звена
 - в явном виде выписываются силы реакции связей между звеньями
 - уравнения в численной рекурсивной форме
 - лучше для синтеза (управление, применение)

Исключая силы реакции и осуществляя обратную подстановку, можем получить из ур-ий Ньютона ур-ия движения аналогичные ур-ям Лагранжа

Законы Ньютона

2-й закон Ньютона

- линейное движение - сумма сил = изменение линейного момента (импульса)

$$\sum f_i = \frac{d}{dt} (mv_c) = m\dot{v}_c$$

- вращательное движение - сумма моментов = изменение углового момента

$$\begin{aligned} \sum \tau_i &= \frac{d}{dt} (\mathcal{I}\omega) = \mathcal{I}\dot{\omega} + \frac{d}{dt} (R\mathcal{I}_i R^T) \omega = \mathcal{I}\dot{\omega} + (\dot{R}\mathcal{I}_i R^T + R\mathcal{I}_i \dot{R}^T) \omega \\ &= \mathcal{I}\dot{\omega} + S(\omega)R\mathcal{I}_i R^T \omega + R\mathcal{I}_i R^T S^T(\omega)\omega = \mathcal{I}\dot{\omega} + \omega \times \mathcal{I}\omega \end{aligned}$$

$\mathcal{I} = R\mathcal{I}_i R^T$ - момент инерции в инерциальной СК, \mathcal{I}_i - момент инерции в собственной СК звена

3-й закон Ньютона

Принцип баланса действия и противодействия

сила/момент, приложенная телом i к телу $i+1$ = - сила/момент, приложенная телом $i+1$ к телу i

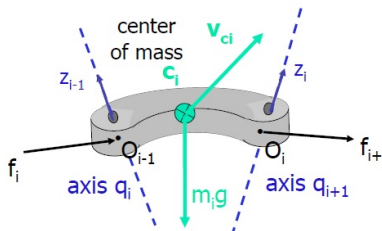
Производная вектора в движущейся СК

- скорость частицы $v = v_c + \omega \times r = v_c + S(\omega)r$
- скорость в стационарной СК ${}^0v_i = {}^0R_i \cdot {}^i v_i$
- ускорение в стационарной СК

$$\begin{aligned}
 {}^0a_i &= {}^0\dot{v}_i = {}^0R_i \cdot {}^i \dot{v}_i + {}^0\dot{R}_i \cdot {}^i v_i = {}^0R_i^i \cdot \dot{v}_i + {}^0\omega_i \times {}^0R_i \cdot {}^i v_i = \\
 &{}^0R_i ({}^i \dot{v}_i + {}^i \omega_i \times {}^i v_i) = {}^0R_i \cdot {}^i a_i \Rightarrow \\
 &{}^i a_i = {}^i \dot{v}_i + {}^i \omega_i \times {}^i v_i
 \end{aligned} \tag{1}$$

- ${}^0a_n = {}^0a_i + {}^i a_n + ({}^i \omega_n \times {}^0a_i)$

Линейное движение



Уравнение для сил

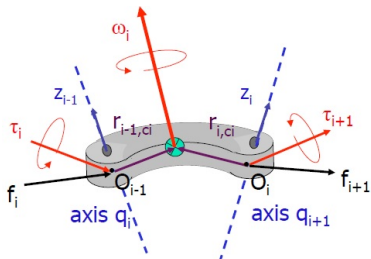
$$f_i - f_{i+1} + m_i g = m_i a_{c_i}$$

©De Luca

f_i - сила, с которой звено $i - 1$ действует на звено i , f_{i+1} - сила, с которой звено i действует на звено $i + 1$, $m_i g$ - сила гравитации, a_{c_i} - линейное ускорение центра масс звена

Все векторы выражены в одной СК (локальная СК звена)!

Вращательное движение



Уравнение для моментов

$$\begin{aligned} \tau_i - \tau_{i+1} + f_i \times r_{i-1,c_i} - f_{i+1} \times r_{i,c_i} \\ = \mathcal{I}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (\mathcal{I}_i \omega_i), \end{aligned}$$

©De Luca

τ_i - момент, с которым звено $i - 1$ действует на звено i , τ_{i+1} - момент, с которым звено i действует на звено $i + 1$, $f_i \times r_{i-1,c_i}$ - момент из-за действия силы f_i , $-f_{i+1} \times r_{i,c_i}$ - момент из-за действия силы $-f_{i+1}$, $\dot{\omega}_i$ - угловое ускорение i -го звена

Все векторы выражены в одной СК (локальная СК звена)!

Рекурсивная процедура

Процедура для n -звенного манипулятора

- 1 выбрать СК $0, \dots, n$ где СК i прикреплена к звену i , СК 0 - инерциальная. Предполагаем, что желаемая траектория $\{q, \dot{q}, \ddot{q}\}$ (в обобщенных координатах) задана.
- 2 Вычислить ускорения и скорости звеньев $\{a_{ci}, \omega_i, \alpha_i\}$ для i от 1 до n для начальных условий $\{a_{c0} = 0, \omega_0 = 0, \alpha_0 = 0\}$.
- 3 Вычислить силы/моменты, действующие на звенья $\{f_i, \tau_i\}$ для i от n до 1, стартуя с терминальных условий $\{f_{n+1} = 0, \tau_{n+1} = 0\}$.

Вычисление скоростей/ускорений

Прямая рекурсия

$$\omega_i = {}^{i-1}R_i^T [\omega_{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1}] \quad \leftarrow \omega_0$$

$$\dot{\omega}_i = {}^{i-1}R_i^T [\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{q}_i z_{i-1} - \dot{q}_i z_{i-1} \times (\omega_{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1})]$$

AR
$$= {}^{i-1}R_i^T [\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{q}_i z_{i-1} + \dot{q}_i \omega_{i-1} \times z_{i-1}] \quad \leftarrow \dot{\omega}_0$$

$$a_i = {}^{i-1}R_i^T a_{i-1} + \dot{\omega}_i \times {}^i r_{i-1,i} + \omega_i \times (\omega_i \times {}^i r_{i-1,i}) \quad \leftarrow a_0 - \textcircled{{}^0g}$$

$$a_{ci} = a_i + \dot{\omega}_i \times r_{i,ci} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,ci})$$

- 1 выражения для вращательных звеньев
- 2 если нет верхнего индекса, вектор выражен в СК звена
- 3 можно исключить силу гравитации из вычислений, если учесть ускорение свободного падения 0g при инициализации процедуры

Вычисление сил/моментов

Обратная рекурсия

F/TR

$$f_i = f_{i+1} + m_i(a_{ci} - \cancel{g}^i)$$

$$\tau_i = \tau_{i+1} - f_i \times (r_{i-1,i} + r_{i,ci}) + f_{i+1} \times r_{i,ci} + I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i)$$

- 1 на каждом шаге для звена получаем два векторных уравнения: для сил и для моментов
- 2 чтобы получить n скалярных уравнений, нужно выполнить проекцию сил/моментов - FP

$$u_i = \begin{cases} f_i^T \cdot {}^i z_{i-1} + \eta_i \dot{q}_i, & \sigma_i = 0 \\ \tau_i^T \cdot {}^i z_{i-1} + \eta_i \dot{q}_i, & \sigma_i = 1 \end{cases}$$

$\sigma_i = 0$ для линейных звеньев, $\sigma_i = 1$ для вращательных звеньев, $\eta_i \dot{q}_i$ - диссипативная сила вязкого трения, u_i - обобщенная сила (аналогична ур-ию Эйлера-Лагранжа)

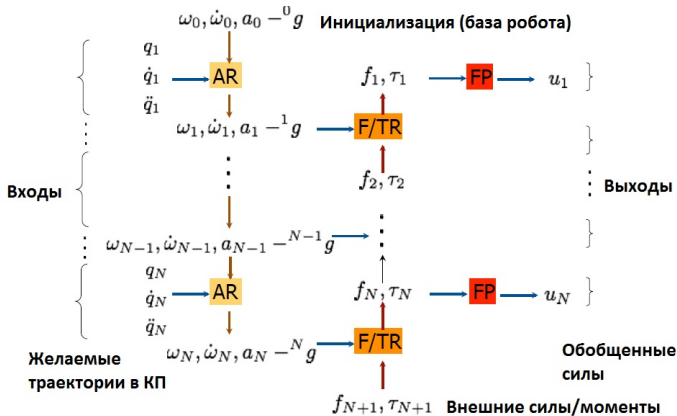
Комментарии к методу

- численная реализация метода рекомендуется для использования в реальном времени
- на каждом шаге рекурсий подставляются численные значения параметров
- вычислительная сложность процедуры растет линейно с числом звеньев $O(n)$ - на каждом шаге сложность одинакова

Вычисление инверсной динамики

Для вычисления нужна информация о работе

- кол-во n и тип звеньев σ_i
- кинематические параметры (Денавит-Хартенберг)
- динамические параметры (массы, инерции, коорд. центров масс ..)

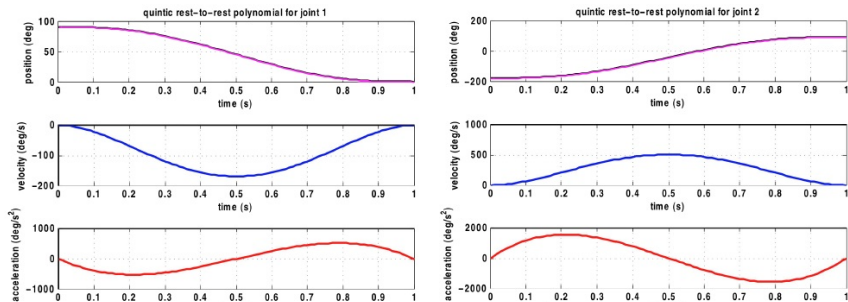


Вычисление компонентов ур-ия движения

- полная динамика $\tau = NE(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$
- вектор гравитации $g(q) = NE(q_d, 0, 0)$
- Кориолисовы/центробежные силы $c(q, \dot{q}) = NE(q_d, \dot{q}_d, 0)|_{g=0}$
- матрица инерции (постолбцово) $m_i(q) = NE(q_d, 0, 1)|_{g=0}$
- обобщенный момент $M(q)\dot{q} = NE(q_d, 0, \dot{q})|_{g=0}$

Вычисление компонентов ур-ия движения

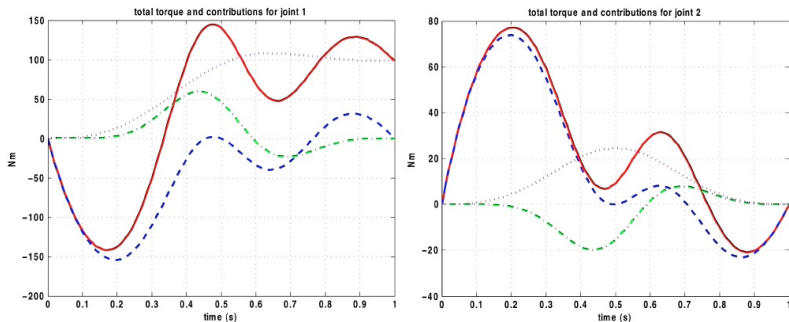
Моделирование 2R манипулятора



Желаемые траектории (заданы полиномами 5-го порядка)

Вычисление компонентов ур-ия движения

Моделирование 2R манипулятора



Вычисленные обобщенные моменты и численные значения компонентов ур-ия движения

Вычисление прямой динамики

Востребовано для моделирования

Процедура

- для текущего состояния (q, \dot{q})
$$\ddot{q} = M^{-1}(q)(\tau - c(q, \dot{q}) - g(q)) = M^{-1}(q)(\tau - n(q, \dot{q}))$$
- вычислить Кориолисовы/центробежные и гравитационные силы
$$n(q, \dot{q}) = NE(q_d, \dot{q}_d, 0)$$
- вычислить по столбцово матрицу инерции $m_i(q) = NE(q_d, 0, 1)|_{g=0}$
- обратить матрицу инерции $M^{-1}(q) = inv(M(q))$
- для заданных обобщенных сил вычислить $\ddot{q} = inv(M(q))(\tau - n(q, \dot{q}))$
- численно проинтегрировать и вычислить следующее состояние (q, \dot{q})

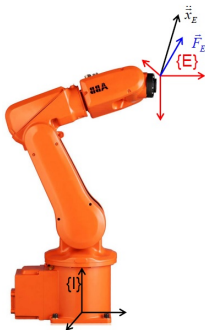
Ур-ие движения в операционном пространстве

- Динамика в конфиг. пр-ве

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) = \tau$$

- Динамика в операционном пр-ве

$$\Lambda \ddot{x}_E + \mu + \rho = F_e$$



Ур-ие движения в операционном пространстве

- Динамика в конфиг. пр-ве
- Динамика в операционном пр-ве

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) = \tau$$

$$\Lambda \ddot{x}_e + \mu + \rho = F_e$$

- проекция моментов в звеньях в силы на рабочем инструменте

$$\tau = J_e^T F_e$$

- кинематические соотношения

$$\dot{x}_e = J_e \dot{q} \Rightarrow \ddot{x}_e = J_e \ddot{q}_e + \dot{J}_e \dot{q}_e$$

$$\ddot{x}_e = J_e M^{-1} \left(J_e^T F_e - (c(q, \dot{q}) + g(q)) \right) + \dot{J}_e \dot{q}_e \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_e + J_e M^{-1} (c(q, \dot{q}) + g(q)) - \dot{J}_e \dot{q}_e = J_e M^{-1} J_e^T F_e$$

- модель в операционном пр-ве

$$\Lambda = \left(J_e M^{-1} J_e^T \right)^{-1} \quad \mu = \Lambda J_e M^{-1} c(q, \dot{q}) - \Lambda \dot{J}_e \dot{q}_e \quad \rho = \Lambda J_e M^{-1} g(q)$$

Ур-ие движения в операционном пространстве

- Динамика в конфиг. пр-ве
- Динамика в операционном пр-ве

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) = \tau$$

$$\Lambda \ddot{x}_e + \mu + \rho = F_e$$

- проекция моментов в звеньях в силы на рабочем инструменте

$$\tau = J_e^T F_e$$

- кинематические соотношения

$$\dot{x}_e = J_e \dot{q} \Rightarrow \ddot{x}_e = J_e \ddot{q}_e + \dot{J}_e \dot{q}_e$$

$$\ddot{x}_e = J_e M^{-1} \left(J_e^T F_e - (c(q, \dot{q}) + g(q)) \right) + \dot{J}_e \dot{q}_e \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_e + J_e M^{-1} (c(q, \dot{q}) + g(q)) - \dot{J}_e \dot{q}_e = J_e M^{-1} J_e^T F_e$$

- модель в операционном пр-ве

$$\Lambda = \left(J_e M^{-1} J_e^T \right)^{-1} \quad \mu = \Lambda J_e M^{-1} c(q, \dot{q}) - \Lambda \dot{J}_e \dot{q}_e \quad \rho = \Lambda J_e M^{-1} g(q)$$

Ур-ие движения в операционном пространстве

- Динамика в конфиг. пр-ве
- Динамика в операционном пр-ве

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) = \tau$$

$$\Lambda \ddot{x}_e + \mu + \rho = F_e$$

- проекция моментов в звеньях в силы на рабочем инструменте

$$\tau = J_e^T F_e$$

- кинематические соотношения

$$\dot{x}_e = J_e \dot{q} \Rightarrow \ddot{x}_e = J_e \ddot{q}_e + \dot{J}_e \dot{q}_e$$

$$\ddot{x}_e = J_e M^{-1} \left(J_e^T F_e - (c(q, \dot{q}) + g(q)) \right) + \dot{J}_e \dot{q}_e \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_e + J_e M^{-1} (c(q, \dot{q}) + g(q)) - \dot{J}_e \dot{q}_e = J_e M^{-1} J_e^T F_e$$

- модель в операционном пр-ве

$$\Lambda = \left(J_e M^{-1} J_e^T \right)^{-1} \quad \mu = \Lambda J_e M^{-1} c(q, \dot{q}) - \Lambda \dot{J}_e \dot{q}_e \quad \rho = \Lambda J_e M^{-1} g(q)$$

На этой лекции...

- моделирование замкнутых кинематических цепей
- модели роботов с гибкими сочленениями
- общие положения метода Ньютона(-Эйлера)
- рекурсивная процедура
- вычисление прямой/обратной динамики
- модели в операционном пространстве

На следующей лекции...

- линейная параметризация уравнений движения
- динамическая калибровка манипуляционных роботов
- модели в форме вход-состояние-выход

Спасибо за внимание!



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

E-mail: s.kolyubin@corp.ifmo.ru