Динамика робототехнических систем: Метод (Эйлера-)Лагранжа

Преподаватель: к.т.н., Колюбин С.А.

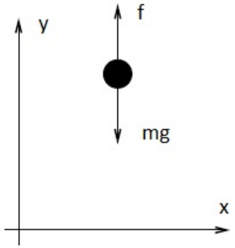
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

2016

Содержание лекции

- Мотивационный пример
- Вычисление кинетической и потнециальной энергии системы
- Уравнение движения и его свойства
- Заключение

Мотивационный пример



©Spong, Hutchinson, Vidyasagar

2-й закон Ньютона

$$m\ddot{y} = f - mg \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(0.5m\dot{y}^2\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{y}}, \tag{2}$$

где $K = 0.5m\dot{y}^2$ - кинетическая энергия

$$mg = \frac{\partial}{\partial y}(mgy) = \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{3}$$

$P = mgy$ - потенциальная энергия
Лагранжиан системы $L = K - P$
Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = f \tag{4}$$

Мотивационный пример - 2

Виртуальные (независимые) перемещения по обобщенным координатам δq_j

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j,\ i = 1, \dots, k$$

Принцип Д'Аламбера

$$\sum_{i=1}^{k} f_i^T \delta r_i - \sum_{i=1}^{k} \dot{p}_i^T \delta r_i = 0 \tag{5}$$

Виртуальная работа внешних сил

$$\sum_{i=1}^{k} f_i^T \delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \delta q_j, \tag{6}$$

$\psi_j = \sum_{i=1}^{k} f_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$ - j-я обобщенная сила

Виртуальная работа внутренних сил

$$\sum_{i=1}^{k} \dot{p}_i^T \delta r_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} m_i \ddot{r}_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{7}$$

Используя правило производной произведения и для $\dot{r}_i = v_i$

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \ddot{r}_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[m_i v_i^T \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \right] - m_i v_i^T \frac{\partial v_j}{\partial q_j} \right\} \tag{8}$$

Мотивационный пример - 2 (прод.)

Кинетическая энергия

$$K = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i$$

Тогда виртуальная работа внутренних сил

$$\sum_{i=1}^{k} \dot{p}_i^T \delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \tag{9}$$

Подставляем выражения для виртуальной работы внутренних и внешних сил в выражение, описывающее Принцип Д'Аламбера

$$\sum_{i=1}^{k} \dot{p}_i^T \delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} - \psi_j \right\} \delta q_j = 0 \Rightarrow \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = \psi_j, j = 1, \ldots n \tag{11}$$

Пусть обобщенная сила включает внешние силы и силы гравитации (консервативные) $\psi_j = -\frac{\partial P}{\partial q_j} + \tau_j$, где $P(q)$ - потнециальная энергия системы, тогда уравнение движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tau_j \tag{12}$$

Стандартная процедура

- выбрать обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots q_n$
- вычислить кинетическую K и потенциальную P энергию системы в обобщенных координатах
- вычислить Лагранжиан систем L
- составить уравнение движение в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \tau_k,\ k = 1, 2, \dots n \tag{13}$$

τ_k обобщенный момент/сила, соотв. q_k

Полная энергия системы

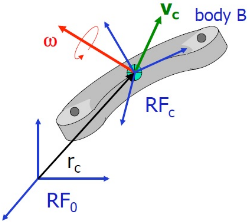


Рис.: ©DeLuca

Теорема Кёнига

Кинетическая энергия механической системы есть энергия движения центра масс плюс энергия движения относительно центра масс

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m |v|^2 + \frac{1}{2} \omega^T \mathcal{I} \omega$$

где m - полная масса, v и ω - векторы линейной и угловой скорости, $\mathcal{I}$ - тензор инерции

Все величины выражены в инерциальной СК!

Угловая скорость

$$\omega \leftarrow S(\omega) = \dot{R}(t) R^T(t),$$

где R - м-ца поворота от СК твердого тела к инерциальной СК

Тензор инерции

Тензор инерции - симметричная матрица 3×3

В СК твердого тела - постоянная величина

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Тензор инерции

Тензор инерции - симметричная матрица 3×3
В СК твердого тела - постоянная величина

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Главные моменты инерции

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int\int\int (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz \\ I_{yy} &= \int\int\int (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz \\ I_{zz} &= \int\int\int (y^2 + x^2)\rho(x,y,z)dxdydz \end{aligned}$$

Тензор инерции

Тензор инерции - симметричная матрица 3×3
В СК твердого тела - постоянная величина

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Перекрестные моменты инерции

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{yx} &= -\int\int\int xy\rho(x,y,z)dxdydz \\ I_{xz} = I_{zx} &= -\int\int\int xz\rho(x,y,z)dxdydz \\ I_{yz} = I_{zy} &= -\int\int\int yz\rho(x,y,z)dxdydz \end{aligned}$$

Тензор инерции

Тензор инерции - симметричная матрица 3×3
В СК твердого тела - постоянная величина

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Тензор инерции в инерциальной СК

$$\mathcal{I} = R(t) I R^T(t)$$

Теорема Штейнера

- для момента инерции

$$\mathcal{I}_{ij} = \mathcal{I}_{ij,c} + md^2 \tag{14}$$

- обобщение на тензор инерции

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_c + mS^T(r)S(r) \tag{15}$$

Тензор инерции параллелепипеда

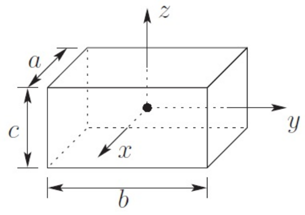


Рис.: Параллелепипед с равномерным распределением массы (©Spong).

Основной момент инерции вокруг оси x

$$I_{xx} = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz = ???$$

Тензор инерции параллелепипеда

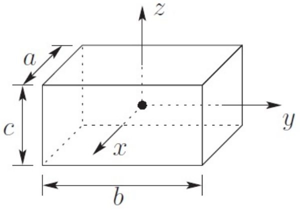


Рис.: Параллелепипед с равномерным распределением массы (©Spong).

Основной момент инерции вокруг оси x

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz \\ &= \rho\frac{abc}{12}(b^2+c^2) = \frac{m}{12}(b^2+c^2) \end{aligned}$$

Тензор инерции параллелепипеда

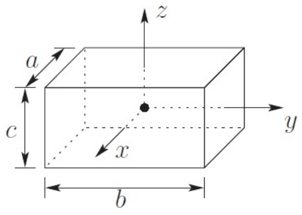


Рис.: Параллелепипед с равномерным распределением массы (©Spong).

Компоненты тензора инерции тела

$$I_{xx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2), \quad I_{yy} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2), \quad I_{zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Кинетическая энергия n-звенного робота

Сумма кинетической энергии поступательного и вращательного движения

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \left| v_c \right|^2 + \frac{1}{2} \omega^T \mathcal{I} \omega$$

Скорости центра масс тела

- $v_c = \dot{r}_c$ - функция обобщенных координат q скоростей $\dot{q}$;
- ω - функция обобщенных координат q скоростей $\dot{q}$.

Кинетическая энергия n-звенного робота

Сумма кинетической энергии поступательного и вращательного движения

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \left| v_c \right|^2 + \frac{1}{2} \omega^T \mathcal{I} \omega$$

Скорости центра масс тела

- $v_c = \dot{r}_c$ - функция обобщенных координат q скоростей $\dot{q}$;
- ω - функция обобщенных координат q скоростей $\dot{q}$.

Соотношения могут быть получены через Якобианы, ассоциированные с центрами масс звеньев

$$v_{c,i} = J_{v_i}(q)\dot{q}, \quad \omega_i = J_{\omega_i}(q)\dot{q}$$

Кинетическая энергия n-звенного робота

Сумма кинетической энергии поступательного и вращательного движения

$$\mathcal{K} = \tfrac{1}{2} m \left| v_c \right|^2 + \tfrac{1}{2} \omega^T \mathcal{I} \omega$$

Скорости центра масс тела

- $v_c = \dot{r}_c$ - функция обобщенных координат q скоростей $\dot{q}$;
- ω - функция обобщенных координат q скоростей $\dot{q}$.

Соотношения могут быть получены через Якобианы, ассоциированные с центрами масс звеньев

$$v_{c,i} = J_{v_i}(q)\dot{q}, \quad \omega_i = J_{\omega_i}(q)\dot{q}$$

Полная кинетическая энергия робота

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \left[\sum_{i=1}^{n} m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{\omega_i}(q)^T R_i(q) I R_i(q)^T J_{\omega_i}(q) \right] \dot{q}$$

Потенциальная энергия n-звенного робота

Потенциальная энергия i-го звена

$$\mathcal{P}_i = m_i g^T r_{c,i}$$

где $r_{c,i}$ - вектор, описывающий расположение центра масс звена

$$\begin{vmatrix} r_{c,i} \\ 1 \end{vmatrix} =^0 H_1(q_1)^1 H_2(q_2)\cdots^{i-1} H_i(q_i) \begin{vmatrix} {}^i r_{c,i} \\ 1 \end{vmatrix} \quad (16)$$

Полная потенциальная энергия робота

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i g^T r_{c,i}$$

Для кинематической цепи

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i$$

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i(q_j, j \le i)$$

Потенциальная энергия n-звенного робота

Потенциальная энергия i-го звена

$$\mathcal{P}_i = m_i g^T r_{c,i}$$

где $r_{c,i}$ - вектор, описывающий расположение центра масс звена

$$\begin{vmatrix} r_{c,i} \\ 1 \end{vmatrix} =^0 H_1(q_1)^1 H_2(q_2) \cdots {}^{i-1} H_i(q_i) \begin{vmatrix} {}^i r_{c,i} \\ 1 \end{vmatrix} \tag{16}$$

Полная потенциальная энергия робота

$$\boxed{\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i g^T r_{c,i}}$$

Для кинематической цепи

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i$$

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i(q_j, j \leq i)$$

Уравнение движения

- Кинетическая энергия системы

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \frac{1}{2}\dot{q}^T\left[\sum_{i=1}^{n} m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{\omega_i}(q)^T R_i(q) I R_i(q)^T J_{\omega_i}(q)\right]\dot{q} \\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\sum_{k,j} d_{kj}(q)\dot{q}_k\dot{q}_j\end{aligned}$$

Уравнение движения

- Кинетическая энергия системы

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \frac{1}{2}\dot{q}^T\left[\sum_{i=1}^{n} m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{\omega_i}(q)^T R_i(q) I R_i(q)^T J_{\omega_i}(q)\right]\dot{q} \\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\sum_{k,j} d_{kj}(q)\dot{q}_k\dot{q}_j\end{aligned}$$

- Для консервативных обобщенных сил $\psi_k = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_k} + \tau_k$

Уравнение движения

- Кинетическая энергия системы

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \frac{1}{2}\dot{q}^T\left[\sum_{i=1}^{n} m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{\omega_i}(q)^T R_i(q) I R_i(q)^T J_{\omega_i}(q)\right]\dot{q} \\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\sum_{k,j} d_{kj}(q)\dot{q}_k\dot{q}_j\end{aligned}$$

- Для консервативных обобщенных сил $\psi_k = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_k} + \tau_k$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \tau_k$$

Уравнение движения

- Кинетическая энергия системы

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \frac{1}{2}\dot{q}^T\left[\sum_{i=1}^{n} m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{\omega_i}(q)^T R_i(q) I R_i(q)^T J_{\omega_i}(q)\right]\dot{q} \\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\sum_{k,j} d_{kj}(q)\dot{q}_k\dot{q}_j\end{aligned}$$

- Для консервативных обобщенных сил $\psi_k = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_k} + \tau_k$
- Лагранжиан системы $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \tau_k$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (\mathcal{K} - \mathcal{P})}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (\mathcal{K} - \mathcal{P})}{\partial q_k} = \tau_k$$

Уравнение движения

- Кинетическая энергия системы

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \frac{1}{2}\dot{q}^T\left[\sum_{i=1}^{n} m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{\omega_i}(q)^T R_i(q) I R_i(q)^T J_{\omega_i}(q)\right]\dot{q} \\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\sum_{k,j} d_{kj}(q)\dot{q}_k\dot{q}_j\end{aligned}$$

- Для консервативных обобщенных сил $\psi_k = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_k} + \tau_k$
- Лагранжиан системы $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \tau_k$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(\mathcal{K} - \mathcal{P})}{\partial q_k} = \tau_k$$

Уравнение движения (прод.)

Уравнение движения имеет четкую структуру

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(\mathcal{K} - \mathcal{P})}{\partial q_k} = \tau_k, \qquad k = 1, \dots, n$$

Уравнение движения (прод.)

Уравнение движения имеет четкую структуру

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(\mathcal{K} - \mathcal{P})}{\partial q_k} = \tau_k, \qquad k = 1, \ldots, n$$

Первое слагаемое

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q}\right] = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\dot{q}_j$$

Уравнение движения (прод.)

Уравнение движения имеет четкую структуру

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(\mathcal{K}-\mathcal{P})}{\partial q_k} = \tau_k, \qquad k = 1, \ldots, n$$

Первое слагаемое

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q}\right] = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\dot{q}_j$$

и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n} d_{kj}\dot{q}_j\right] = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \tfrac{d}{dt}\left[d_{kj}(q)\right]\dot{q}_j$$

Уравнение движения (прод.)

Уравнение движения имеет четкую структуру

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (\mathcal{K} - \mathcal{P})}{\partial q_k} = \tau_k, \qquad k = 1, \ldots, n$$

Первое слагаемое

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q}\right] = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\dot{q}_j$$

и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n} d_{kj}\dot{q}_j\right] = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \tfrac{d}{dt}\left[d_{kj}(q)\right]\dot{q}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_{kj}(q)}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\dot{q}_j$$

Уравнение движения (прод.)

Уравнение движения имеет четкую структуру

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(\mathcal{K}-\mathcal{P})}{\partial q_k} = \tau_k, \qquad k = 1, \ldots, n$$

Первое слагаемое

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q}\right] = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\dot{q}_j$$

и

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n} d_{kj}\dot{q}_j\right] &= \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \tfrac{d}{dt}\left[d_{kj}(q)\right]\dot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\ddot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j\end{aligned}$$

Уравнение движения (прод.)

Второе слагаемое

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathcal{K}-\mathcal{P})}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2}\dot{q}D(q)\dot{q}-\mathcal{P}\right] = \frac{1}{2}\dot{q}\left[\frac{\partial}{\partial q_k}D(q)\right]\dot{q} - \frac{\partial}{\partial q_k}\mathcal{P} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial}{\partial q_k}\mathcal{P}\end{aligned}$$

Уравнение движения (прод.)

Второе слагаемое

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathcal{K}-\mathcal{P})}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2}\dot{q}D(q)\dot{q}-\mathcal{P}\right]=\frac{1}{2}\dot{q}\left[\frac{\partial}{\partial q_k}D(q)\right]\dot{q}-\frac{\partial}{\partial q_k}\mathcal{P}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j-\frac{\partial}{\partial q_k}\mathcal{P}\end{aligned}$$

Итоговое выражение для уравнения движения

$$\sum_{j=1}^{n}d_{kj}\ddot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}+\frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j+\frac{\partial}{\partial q_k}\mathcal{P}=\tau_k$$

Уравнение движения (прод.)

Второе слагаемое

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathcal{K}-\mathcal{P})}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2}\dot{q}D(q)\dot{q}-\mathcal{P}\right] = \frac{1}{2}\dot{q}\left[\frac{\partial}{\partial q_k}D(q)\right]\dot{q}-\frac{\partial}{\partial q_k}\mathcal{P} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j-\frac{\partial}{\partial q_k}\mathcal{P} \end{aligned}$$

Итоговое выражение для уравнения движения

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j+g_k(q)=\tau_k}\,, \quad k=1,\ldots,n$$

символы Кристофеля $c_{ijk}=c_{jik}$ и градиент потенциальной энергии

$$c_{ijk}(q)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}+\frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}-\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right), \quad g_k(q)=\frac{\partial}{\partial q_k}\mathcal{P}$$

Уравнение движения (прод.)

Второе слагаемое

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathcal{K}-\mathcal{P})}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2}\dot{q}D(q)\dot{q}-\mathcal{P}\right] = \frac{1}{2}\dot{q}\left[\frac{\partial}{\partial q_k}D(q)\right]\dot{q} - \frac{\partial}{\partial q_k}\mathcal{P} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial}{\partial q_k}\mathcal{P}\end{aligned}$$

Итоговое выражение для уравнения движения

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = \tau_k}\,, \quad k = 1, \ldots, n$$

задается в векторной форме как

$$\boxed{D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau}$$

с Кориолисовыми и центробежными силами $C(q)$, $c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} c_{ijk}(q)\dot{q}_i$.

Косо-симметричность $\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$

Чтобы показать, что

$$N = \frac{d}{dt}\left[D(q)\right] - 2C(q, \dot{q}) \ , \quad N^T = -N$$

проверим (k, j)-ый компонент

$$\frac{d}{dt} d_{kj} - 2c_{kj} \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right] \dot{q}_i$$

Косо-симметричность $\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$

Чтобы показать, что

$$N = \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right] - 2C(q,\dot{q}) \ , \quad N^T = -N$$

проверим (k,j)-ый компонент

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt} d_{kj} - 2c_{kj} \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right]\dot{q}_i \\
&= \quad \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right]\right\}\dot{q}_i
\end{aligned}$$

Косо-симметричность $\dot{D}(q) - 2C(q,\dot{q})$

Чтобы показать, что

$$N = \frac{d}{dt}\left[D(q)\right] - 2C(q,\dot{q})\ , \quad N^T = -N$$

проверим (k,j)-ый компонент

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}d_{kj} - 2c_{kj} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right]\dot{q}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right]\right\}\dot{q}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}\right\}\dot{q}_i
\end{aligned}$$

Косо-симметричность $\dot{D}(q) - 2C(q,\dot{q})$

Чтобы показать, что

$$N = \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right] - 2C(q,\dot{q}) \ , \quad N^T = -N$$

проверим (k,j)-ый компонент

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt} d_{kj} - 2c_{kj} \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right]\dot{q}_i \\
&= \quad \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right]\right\}\dot{q}_i \\
&= \quad \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}\right\}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{\partial d_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}\right\}\dot{q}_i
\end{aligned}$$

Косо-симметричность $\dot{D}(q) - 2C(q,\dot{q})$

Чтобы показать, что

$$N = \frac{d}{dt}\left[D(q)\right] - 2C(q,\dot{q}) \ , \quad N^T = -N$$

проверим (k,j)-ый компонент

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}d_{kj} - 2c_{kj} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right]\dot{q}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right]\right\}\dot{q}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}\right\}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial d_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}\right\}\dot{q}_i
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad n_{kj} = -n_{jk}$$

Пассивность

Дана механическая система

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau}$$

с

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - P(q)$$

Пассивность

Дана механическая система

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau}$$

с

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - P(q)$$

Энергия вычисляется из соотношения

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + P(q)$$

Пассивность

Дана механическая система

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau}$$

с

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - P(q)$$

Энергия вычисляется из соотношения

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + P(q)$$

Что случится с $\frac{d}{dt}\mathcal{H}$?

Пассивность (прод.)

Дифференцируя $\mathcal{H}$ вдоль решения системы, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{H} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + P(q)\right] \\ &= \frac{1}{2}\ddot{q}^T D(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \end{aligned}$$

Пассивность (прод.)

Дифференцируя $\mathcal{H}$ вдоль решения системы, получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{H} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + P(q)\right] \\
&= \frac{1}{2}\ddot{q}^T D(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q}
\end{aligned}
$$

Пассивность (прод.)

Дифференцируя $\mathcal{H}$ вдоль решения системы, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{H} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + P(q)\right]\\ &= \frac{1}{2}\ddot{q}^T D(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q}\\ &= \dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q}\\ &= \dot{q}^T\left[\tau - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q)\right] + \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q}\end{aligned}$$

Используем уравнения Лагранжа

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

Пассивность (прод.)

Дифференцируя $\mathcal{H}$ вдоль решения системы, получаем

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\mathcal{H} &= \tfrac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + P(q)\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\ddot{q}^T D(q)\dot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T \left[\tau - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q)\right] + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T\tau + \dot{q}^T\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right] - C(q,\dot{q})\right)\dot{q} + \dot{q}^T\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} - G(q)\right)
\end{aligned}$$

Пассивность (прод.)

Дифференцируя $\mathcal{H}$ вдоль решения системы, получаем

$$
\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\mathcal{H} &= \tfrac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + P(q)\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\ddot{q}^T D(q)\dot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T\left[\tau - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q)\right] + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T\tau + \dot{q}^T\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right] - C(q,\dot{q})\right)\dot{q} + \dot{q}^T \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} - G(q)\right)}_{=0}
\end{aligned}
$$

Пассивность (прод.)

Дифференцируя $\mathcal{H}$ вдоль решения системы, получаем

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\mathcal{H} &= \tfrac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + P(q)\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\ddot{q}^T D(q)\dot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T\left[\tau - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q)\right] + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T\tau + \underbrace{\dot{q}^T\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right] - C(q,\dot{q})\right)\dot{q}}_{=0} + \underbrace{\dot{q}^T\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} - G(q)\right)}_{=0}
\end{aligned}$$

Пассивность (прод.)

Дифференцируя $\mathcal{H}$ вдоль решения системы, получаем

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\mathcal{H} &= \tfrac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + P(q)\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\ddot{q}^T D(q)\dot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T\left[\tau - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q)\right] + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right]\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \\
&= \dot{q}^T\tau + \underbrace{\dot{q}^T\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left[D(q)\right] - C(q,\dot{q})\right)\dot{q}}_{=0} + \dot{q}^T\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} - G(q)\right)}_{=0} \\
&= \dot{q}^T\tau
\end{aligned}$$

Пассивность (прод.)

Дифференциальное соотношение

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \dot{q}^T\tau$$

может быть проинтегрировано так что

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt}\mathcal{H}(q(t),\dot{q}(t))dt &= \mathcal{H}(q(T),\dot{q}(T)) - \mathcal{H}(q(0),\dot{q}(0)) \\ &= \int_0^T \dot{q}(t)^T\tau(t)dt \end{aligned}$$

Пассивность (прод.)

Дифференциальное соотношение

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \dot{q}^T\tau$$

может быть проинтегрировано так что

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt}\mathcal{H}(q(t),\dot{q}(t))dt &= \mathcal{H}(q(T),\dot{q}(T)) - \mathcal{H}(q(0),\dot{q}(0)) \\ &= \int_0^T \dot{q}(t)^T\tau(t)dt \end{aligned}$$

Часть энергии, рассеиваемая в системе, имеет ограничение снизу

$$\int_0^T \dot{q}(t)\tau(t)dt = \mathcal{H}(q(T),\dot{q}(T)) - \mathcal{H}(q(0),\dot{q}(0)) \geq -\mathcal{H}(q(0),\dot{q}(0))$$

Пассивность (прод.)

Дифференциальное соотношение

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \dot{q}^T\tau$$

может быть проинтегрировано так что

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{d}{dt}\mathcal{H}(q(t),\dot{q}(t))dt &= \mathcal{H}(q(T),\dot{q}(T)) - \mathcal{H}(q(0),\dot{q}(0)) \\ &= \int_0^T \dot{q}(t)^T\tau(t)dt\end{aligned}$$

Часть энергии, рассеиваемая в системе, имеет ограничение снизу

$$\int_0^T \dot{q}(t)\tau(t)dt = \mathcal{H}(q(T),\dot{q}(T)) - \mathcal{H}(q(0),\dot{q}(0)) \geq -\mathcal{H}(q(0),\dot{q}(0))$$

Эти соотношения называются

- соотношение пассивности (диссипативности)
- соотношение пассивности (диссипативности) в интегральной форме

Свойства матрицы инерции $D(q)$

Кинетическая энергия механической системы неорицательная

$$\mathcal{K}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} \geq 0$$

Свойства (обобщенной) матрицы инерции

1. $D(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - квадратная
2. $D(q) = D(q)^T$ - симметричная
3. $\dot{q}^T D(q)\dot{q} > 0$ положительно определенная, т.к. кинетическая энергия неотрицательна
4. $D(q)$ имеет положительные собственны числа $0 < \lambda_1(q) \leq \ldots \leq \lambda_n(q)$ такие, что
$$\lambda_1(q)I_n \leq D(q) \leq \lambda_n(q)I_n$$

Т.к. q ограничены, то можно найти равномерные ограничения на матрицу инерии.

На этой лекции...

- общие положения по методу Лагранжа
- вычисление кинетической и потенциальной энергии робота
- составление уравнений движения по методу Лагранжа
- свойства уравнений Лагранжа

На следующей лекции...

- метод Ньютона(-Эйлера)
- моделирование замкнутых кинематических цепей
- модели роботов с гибкими сочленениями
- модели в операционном пространстве

Спасибо за внимание!

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

E-mail: s.kolyubin@corp.ifmo.ru