Динамика робототехнических систем: Принципы и законы движения материальной точки и абсолютно твердого тела

Преподаватель: к.т.н., Колюбин С.А.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

2016

Содержание лекции

- Базовые определения и прицины
- Движение частицы (точечной массы)
- Движение абсолютно твердого тела
- Заключение

Основные методы

Методы

- (Эйлера-)Лагранжа - кинетическая и потенциальная энергия
  - динамика многозвенного робота рассматривается в целом
  - внутренние силы реакции связей исключаются из уравнений
  - уравнения в символьной форме
  - лучше для анализа
- Ньютона(-Эйлера) - баланс сил и моментов
  - уравнения записаны отдельного для каждого тела/звена
  - в явном виде выписываются силы рекции связей между звеньями
  - уравнения в численной рекурсивной форме
  - лучше для синтеза (управление, применение)

Необходимые элементы

- угловые и линейные скорости центра масс как функции обобщенных координат
- динамические параметры: масса, момент инреции, координаты центров масс

Основные методы

Методы

- (Эйлера-)Лагранжа - кинетическая и потенциальная энергия
  - динамика многозвенного робота рассматривается в целом
  - внутренние силы реакции связей исключаются из уравнений
  - уравнения в символьной форме
  - лучше для анализа
- Ньютона(-Эйлера) - баланс сил и моментов
  - уравнения записаны отдельного для каждого тела/звена
  - в явном виде выписываются силы рекции связей между звеньями
  - уравнения в численной рекурсивной форме
  - лучше для синтеза (управление, применение)

Необходимые элементы

- угловые и линейные скорости центра масс как функции обобщенных координат
- динамические параметры: масса, момент инреции, координаты центров масс

Некоторые сведения из линейной алгебры

- косо-симметрическая матрица

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- векторное произведение

$$a \times b = det \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

- $a \times b = S(a) \cdot b$
- $a \times b = -b \times a$
- производная поворотной матрицы ${}^0\dot{R}_i = S({}^0\omega_i){}^0R_i$

Производная вектора в движущейся СК

- скорость частицы $v = v_c + \omega \times r = v_c + S(\omega)r$
- скорость в стационарной СК ${}^0v_i =^0 R_i \cdot^i v_i$
- ускорение в стационарной СК

$$\begin{aligned} {}^0a_i =^0\dot{v}_i =^0 R_i \cdot^i \dot{v}_i +^0 \dot{R}_i \cdot^i v_i =^0 R_i^i \cdot \dot{v}_i +^0 \omega_i \times^0 R_i \cdot^i v_i = \\ {}^0R_i({}^i\dot{v}_i +^i \omega_i \times^i v_i) =^0 R_i \cdot^i a_i \Rightarrow \\ {}^ia_i =^i \dot{v}_i +^i \omega_i \times^i v_i \end{aligned} \tag{1}$$

- ${}^0a_n =^0 a_i +^i a_n + ({}^i\omega_n \times^0 a_i)$

Виртуальные перемещение и работа

Виртуальное перемещение

Мысленное бесконечно малое перемещение, которое в данный момент времени материальная точка может совершить, не нарушая связей

Виртуальная работа

Работа, которую совершили бы активные силы на виртуальных перемещениях, если бы эти перемещения произошли

Фундаментальные принципы

- Принцип виртуальных перемещений (виртуальной работы)
  В положении равновесия работа активных (внешних) сил на виртуальных перемещениях равна нулю
- Принцип Д'Аламбера
  Работа активных сил вместе с силами инерции (реакции) на виртуальных перемещениях равна нулю
- Принцип Гамильтона (наименьшего действия, стационарности действия)
  Для консервативных систем переход из одной точки конфигурационного пространства в другую происходит таким образом, что действие принимает экстремальное (наименьшее) значение

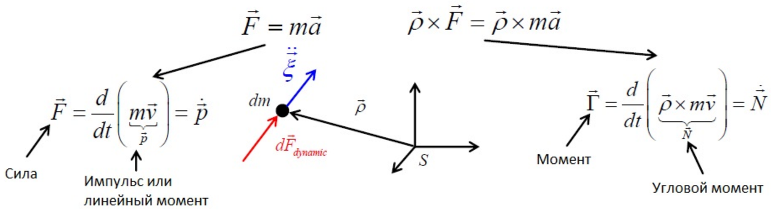
Фундаментальные принципы

- Принцип виртуальных перемещений (виртуальной работы)
  В положении равновесия работа активных (внешних) сил на виртуальных перемещениях равна нулю
- Принцип Д'Аламбера
  Работа активных сил вместе с силами инерции (реакции) на виртуальных перемещениях равна нулю
- Принцип Гамильтона (наименьшего действия, стационарности действия)
  Для консервативных систем переход из одной точки конфигурационного пространства в другую происходит таким образом, что действие принимает экстремальное (наименьшее) значение

Фундаментальные принципы

- Принцип виртуальных перемещений (виртуальной работы)
  В положении равновесия работа активных (внешних) сил на виртуальных перемещениях равна нулю
- Принцип Д'Аламбера
  Работа активных сил вместе с силами инерции (реакции) на виртуальных перемещениях равна нулю
- Принцип Гамильтона (наименьшего действия, стационарности действия)
  Для консервативных систем переход из одной точки конфигурационного пространства в другую происходит таким образом, что действие принимает экстремальное (наименьшее) значение

2 закон Ньютона для частицы



Ньютон - поступательное движение   Эйлер - вращательное движение

Принцип Д'Аламбера

В состоянии равновесия виртуальная работа равна нулю

$$\delta W = \int_B \delta\xi^T(\ddot{\xi}dm - dF) = 0,$$

где dm - масса частицы, $\delta\vec{\xi}$ - виртуальное перемещение, $\ddot{\vec{\xi}}$ - ускорение частицы, $d\vec{F}$ - внешние силы, δW -виртуальная работа

Чтобы привести систему частиц в состояние равновесия, к каждой частице нужно приложить внешнюю силу $-\dot{p}_i$, где p_i - импульс данной частицы

Принцип Д'Аламбера

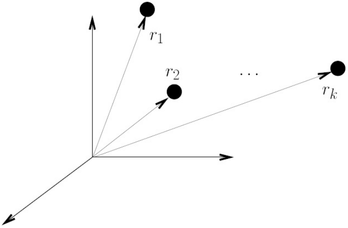
В состоянии равновесия виртуальная работа равна нулю

$$\delta W = \int_B \delta\xi^T(\ddot{\xi}dm - dF) = 0,$$

где dm - масса частицы, $\delta\vec{\xi}$ - виртуальное перемещение, $\ddot{\vec{\xi}}$ - ускорение частицы, $d\vec{F}$ - внешние силы, δW -виртуальная работа

Чтобы привести систему частиц в состояние равновесия, к каждой частице нужно приложить внешнюю силу $-\dot{p}_i$, где p_i - импульс данной частицы

Группа частиц с голономными связями



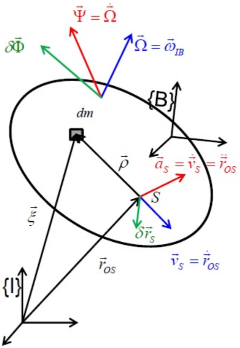
©Spong, Hutchinson, Vidyasagar

- каждая точечная масса имеет 3 степени свободы - всего $3k$
- наложено l голономных связей $g_i(r_1, \dots, r_k) = 0$, $\forall i = 1, \dots, l$ $(||r_1 - r_2|| = l)$
- в связанной системе остается $n = 3k - l$ обобщенных координат q_j, $j = 1, \dots, n$ так что $r_i = r_i(q_1, \dots q_n)$
- виртуальные перемещения δr_i сохраняют голономные связи $g_i(r_1 + \delta r_1, \dots, r_k + \delta r_k) = 0$, $\forall i = 1, \dots, l$ $((r_1 - r_2)^T(\delta r_1 - \delta r_2) = 0)$
- $\delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$, $i = 1, \dots, k$, где δq_j - виртуальные (неограниченные) перемещения по обобщенным координатам
- результирующая сила складывается из внешней силы f_i и силы реакции f_i^a
- если сила реакции связи между двумя точечными массами f_i^a действует вдоль вектора, соединяющего эти частицы, то $\sum_{i=1}^{k} f_i^{aT} \delta r_i = 0$ (работа сил реакции)

Абсолютно твердое тело

АТТ - совокупность материальных точек, связанных между собой (недеформированными) голономными ограничениями

- $m = \int_B dm = \int_B \rho(x,y,z)dxdydz$ - масса тела
- $r_c = \frac{1}{m}\int_B \rho dm$
- $\int_B \rho dm = 0$ (в системе координат центр масс)
- $\int_B \rho\rho^T dm = \Theta_S$ - момент инерции тела относительно центра масс
- I, B - инерциальная и "прикрепленная"к телу системы координат (СК)
- S - центр масс тела, O - центр стационарной СК
- $\vec{v}_S$, $\vec{a}_S$ - линейные скорость и ускорение центра масс
- $\vec{\Omega}$, $\vec{\Psi}$ - угловые скорость и ускорение тела относительно инерционной СК



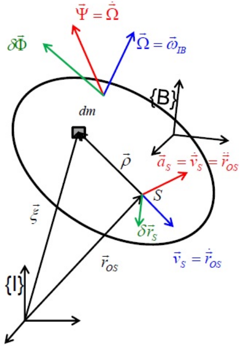
©Marco Hutter

Абсолютно твердое тело

АТТ - совокупность материальных точек, связанных между собой (недеформированными) голономными ограничениями

- $\vec{\xi} = \vec{r}_{OS} + \vec{\rho}$
- $\dot{\vec{\xi}} = \vec{v}_S + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}$
- $\ddot{\vec{\xi}} = \vec{a}_S + \vec{\Psi} \times \vec{\rho} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho})$
- $\delta\vec{\xi} = \delta\vec{r}_S + \delta\vec{\Phi} \times \vec{\rho}$

$$\delta W = \int_B \delta\xi^T (\ddot{\xi} dm - dF) \tag{2}$$
$$= \begin{vmatrix} \delta\vec{r}_S \\ \delta\vec{\Phi} \end{vmatrix}^T \left[\begin{pmatrix} I_{3\times3}m & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \vec{a}_S \\ \vec{\Psi} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \tilde{\Omega}\Theta\vec{\Omega} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{F}^{a,K} \\ \vec{\Gamma}^{a,K} \end{vmatrix} \right]$$
$$= 0$$



©Marco Hutter

Сохранение импульса и углового момента

- приращение импульса $\dot{\vec{p}} = m\vec{a}_S$
- приращение углового момента (вокруг центра масс) $\dot{\vec{N}} = \Theta_S \vec{\Psi} + \vec{\Omega} \times \Theta_S \vec{\Omega}$

Закон сохранения

$$\delta W = \begin{vmatrix} \delta\vec{r}_S \\ \delta\vec{\Phi} \end{vmatrix}^T \left[\begin{vmatrix} \dot{\vec{p}} \\ \dot{\vec{N}} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{F}^{a,K} \\ \vec{\Gamma}^{a,K} \end{vmatrix} \right] = 0 \tag{3}$$

На этой лекции...

- Базовые определения и прицbackup
- Второй закон Ньютона для материальной точки
- Принцип Д'Аламбера
- Вычисление скорости абсолютно твердого тела
- Глономные связи
- Закон сохранения импульса и углового момента

На следующей лекции...

- Метод (Эйлера-)Лагранжа

Спасибо за внимание!

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

E-mail: s.kolyubin@corp.ifmo.ru